熵与音乐
Entropy and Music

西安交通大学
自动化科学与工程学院

主讲人：南楠

CONTENT

1

PART ONE

熵是什么？

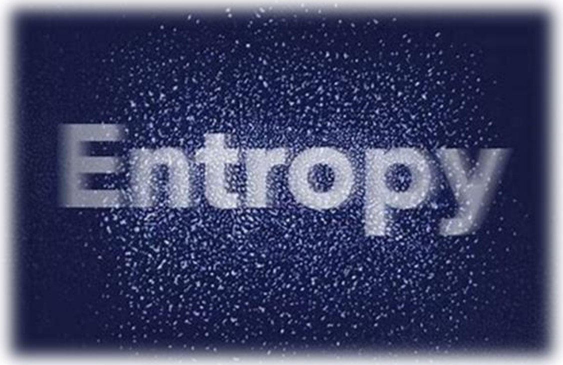
What is entropy?

熵

Entropy

希腊语：εντροπία (entropía)

意为“变化”，即“一个系统内在性质的改变”。



英语：entropy

1865年，德国物理学家克劳修斯提出entropie表征系统的混乱程度（或无序程度）。1923年，德国物理学家普朗克（Planck）来中国讲学用到“entropy”这个词。

中文：熵(shāng)

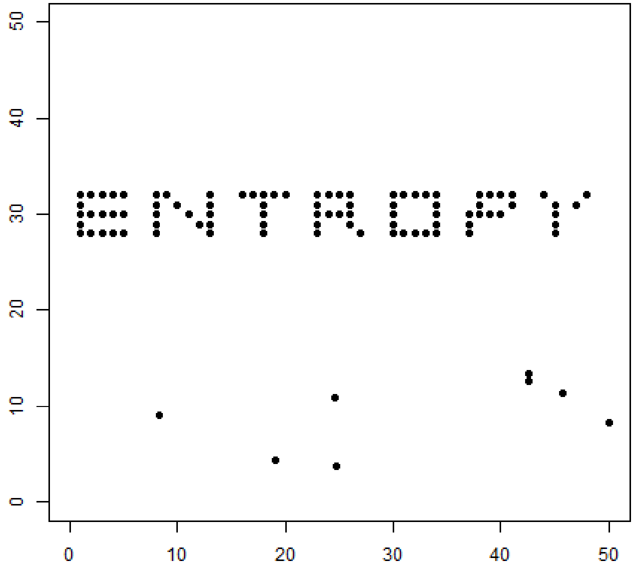
我国物理学家、教育家胡刚复教授翻译时灵机一动，把“商”字加火旁来意译“entropy”，创造了“熵”这个字。

熵的通俗理解

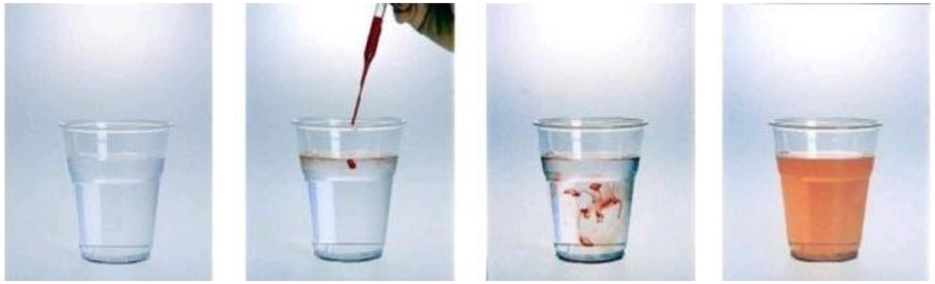
Entropy

熵

系统“无序程度”或“混乱程度”的量度。



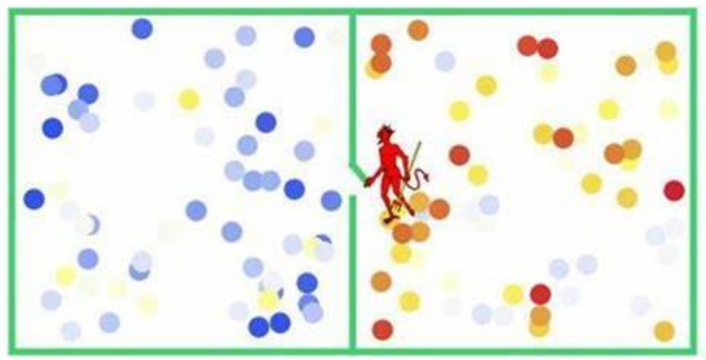
宇宙中的事物都有自发变得更混乱的倾向，也就是说熵会不断增加，直至最大。

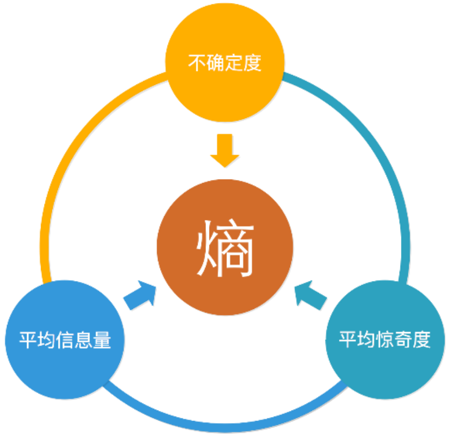


熵增原理（最大熵原理）

熵的起源

Entropy





热力学熵

- 熵的概念最初来自于热力学。
- 19世纪，物理学家克劳修斯和玻尔兹曼用热力学熵来描述系统的混乱程度。

信息熵

- 20世纪，信息论创立，美国工程师香农(C. E. Shannon)提出“信息熵”“来科学地度量通讯的信息量。

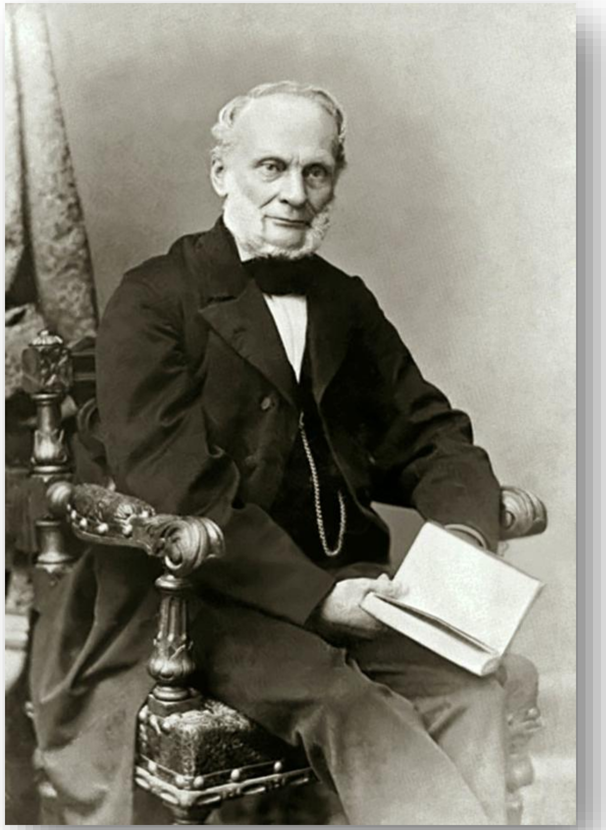
热力学熵

Entropy in Thermodynamics

1865年，德国物理学家克劳修斯将一个热力学系统中“熵的改变”定义为：在一个可逆过程中，输入热量相对于温度的变化率，即

$$dS = \left(\frac{dQ}{T}\right)_{reversible}$$

T为物质的热力学温度；Q为热传导过程中的输入热量，下标“reversible”表示是“可逆过程”。



克劳修斯

热力学熵
Entropy in Thermodynamics

　　1877年，奥地利物理学家玻尔兹曼用

$$S \propto \ln \Omega$$

来表示系统无序性的大小，其中Ω为热力学几率（微观态），表示同宏观状态相恰的微观状态数。

　　1900年，德国物理学家普朗克引进了比例系数k，得到描述热力学熵的玻尔兹曼公式

$$S = k \ln \Omega$$

其中$k = 1.38 \times 10^{23} J \cdot K^{2}$。

刻在玻尔兹曼墓碑上的
玻尔兹曼公式

信息熵

Information Entropy

1948年，香农(C. E. Shannon)将玻尔兹曼公式推广至信息论，提出“信息熵”的概念来描述信源的不确定性。

他明确提出，信息量是确定性的增加、随机性的减少。所以信息熵可以表示信息的价值，是系统有序化程度的一个度量。产生信息，则是为系统引入负熵。

香农给出了计算信息熵的数学表达式。

香农

信息熵

Information Entropy

离散形式：如果随机变量X取值为 $x_i, i=1,2,\ldots,n$，且$x=\{x_i\}$的全体是两两不相容的，x_i出现的概率为$p_i, i=1,2,\ldots,n, \sum_{i=1}^{n} p_i=1$，这时称 X为概率场。香农证明了**信息熵**

$$H(X)=-c\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \ (c>0)$$

是满足下列条件的唯一函数:

（1）H是 $p_1, p_2,\cdots,p_n$的连续函数;

（2）当且仅当 $p_1=p_2=\cdots=p_n$时, H 取最大值;

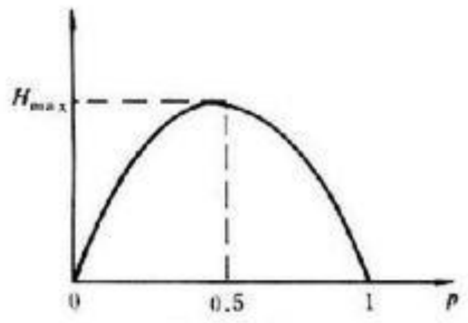
（3）$H(X)=H(Y)+H(X/Y)$,其中 $Y=f(X)$,$H(X/Y)$为已知 Y的条件下 X 的条件熵，此时，称 $H(X)$为概率场 X 的熵。

若对数log是以2为底——“比特”Bit为单位。
“比特”的出现标志着人类知道了如何计量信息量。

连续形式：如果随机变量 X是连续分布的，其分布密度函数为 $f(x)$, X的熵定义为

$$H(X)=-\int_R f(x)\log f(x)dx$$

式中, R 为$f(x)$的定义域。



二元信源的熵函数

最简单的单符号信源仅取0和1两个元素，即二元信源。

离散信源 信息熵的性质

- 非负性：收到一个信源符号所获得的信息量应为正值，即

$$H \geq 0$$

- 可加性：相互独立的情况下，其熵的和等于和的熵。
- 对称性：即对称于$p = 0.5$。
- 确定性：$H(1,0) = 0$，即$p = 0$或$p = 1$已是确定状态，所得信息量为零。
- 极值性：$p = 0.5$，H取最大值。

连续信源 信息熵的性质

- 不具有非负性。连续信源取值无限，信息量是无限大。
- 可加性：相互独立的情况下，其熵的和等于和的熵。
- 极值性：当且仅当 $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$时，H 取最大值。
- 对称性、凸性：熵函数是关于所有变量的对称凸函数。交换变量顺序，熵函数的值不变，所以为对称函数；由熵及凸函数的定义易证熵函数为凸函数，且可得极值性。

2

PART TWO

最大熵原理

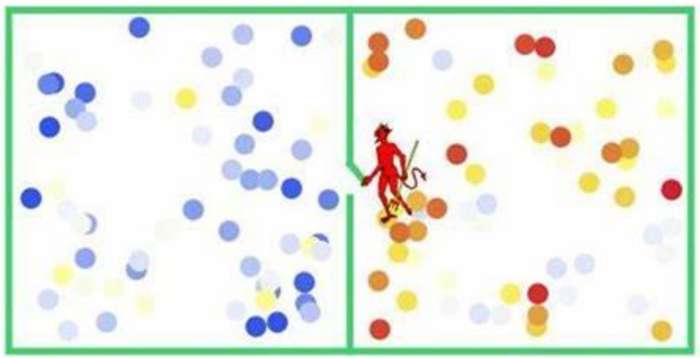
Principle of Maximum Entropy

最大熵原理/熵增原理

Principle of Maximum Entropy

最大熵原理/熵增原理-热力学第二定律：

在孤立系统中，体系与环境没有能量交换，体系总是自发地向混乱度增大的方向变化，总使整个系统的熵值增大，此即最大熵原理/熵增原理。



1850年，克劳修斯首次明确指出热力学第二定律的基本概念。

最大熵原理/熵增原理

Principle of Maximum Entropy

1957年，杰恩（E.T. Jayne） 在提出了最大熵原理的统计模型。

最小偏见的概率分布是它的熵在根据已知样本数据信息的一些约束条件下达到最大值，即

$$\max H(X) = -\int_R f(x) \log f(x) dx$$

s. t.

$$\int_R f(x)\, dx = 1$$

$$\int_R x^n f(x)\, dx = \mu_n, n = 1, 2, \dots, N$$

式中,μ_n为第n阶原点矩，其值可由样本数据计算出来。计算公式

$$\mu_n = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^n$$

N为所用原点矩的阶数。

最大熵原理/熵增原理的应用

Principle of Maximum Entropy

人活着就是在对抗熵增定律，生命以负熵为生。

——薛定谔在《生命是什么》

物理学

信息论

机器学习

经济金融

等等

3

PART THERE

熵与音乐

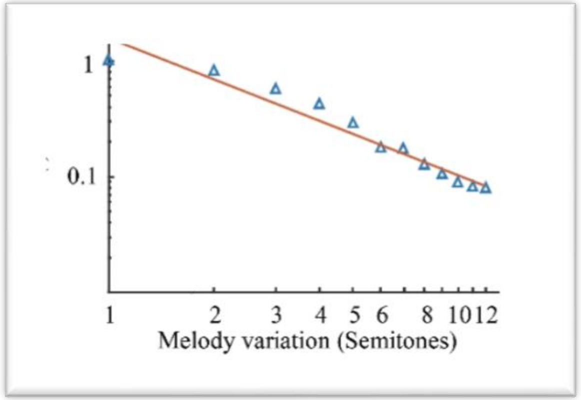
Entropy and Music

我的博士工作之一：音乐旋律中的幂律模型

The common quantitative characteristics of music melodies —— pursuing the constrained entropy maximization casually in composition

1. 基于作曲理论，我们发现了调性音乐旋律变化的三个数学特征
   - ◆ 音符随机序列为稳态分布
   - ◆ 旋律曲线的光滑性趋于小常数
   - ◆ 旋律变化熵最大
2. 我们推导得到：音乐旋律变化的逆累积分布服从幂律

幂律：$T(i) = P(X \geq i) = ci^{-D}$



巴赫，c小调双簧管小提琴协奏曲
J. S. Bach, Concerto for oboe and violin in c minor.

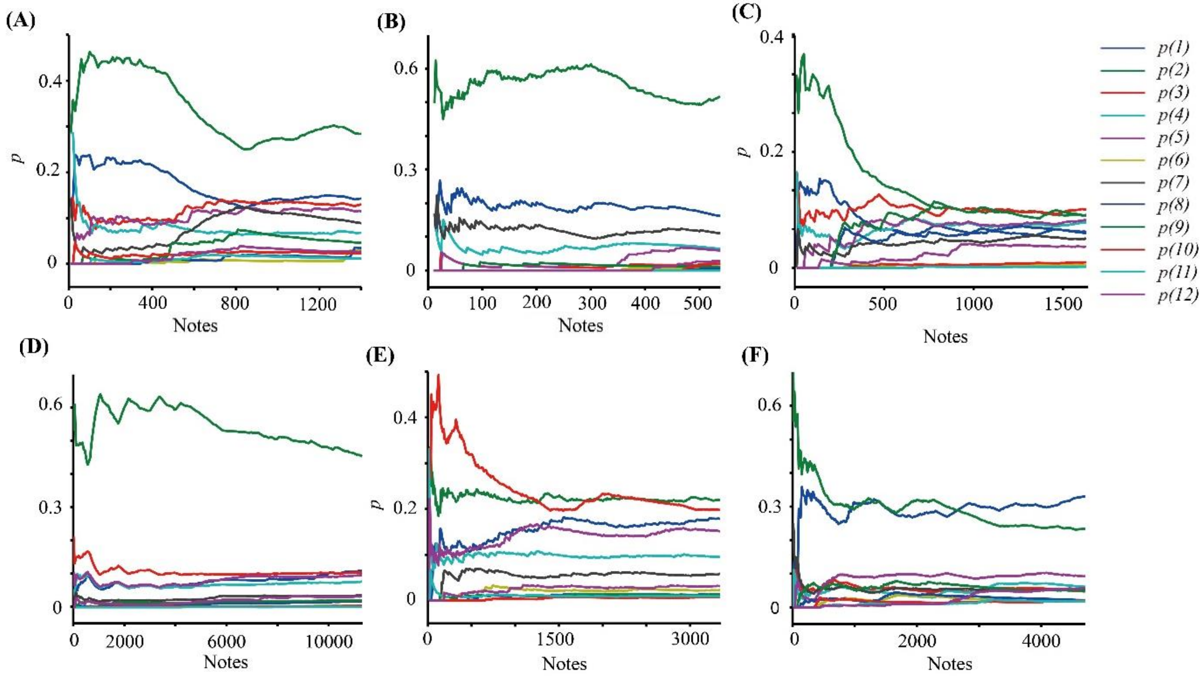
特征一：旋律变化的稳态分布

Characteristic I: Stationary distribution of melody variations

因为旋律大量重复使用，音乐结构组织的高度统一，旋律音程（半音为单位的变化）分布为稳态分布

$$\lim_{N\to\infty} p(i,N) = p(i)$$

$p(i,N)$: N个音符时旋律变化(旋律音程)i 的频率。



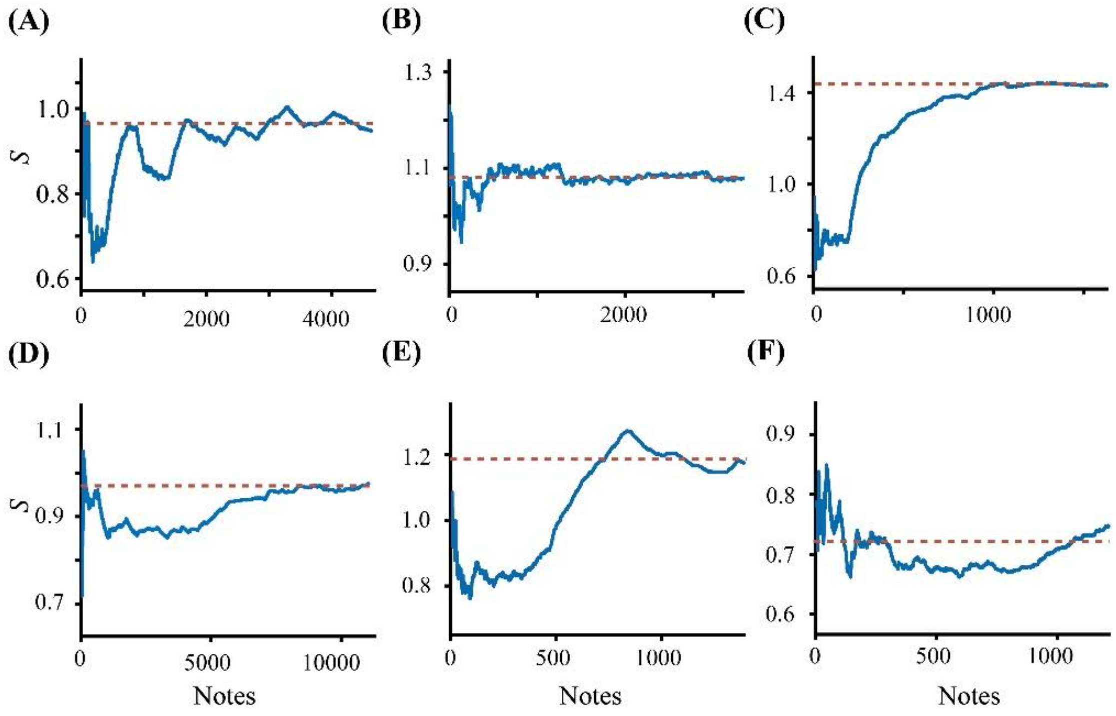
随着音符数不断增加，各个旋律音程的出现频率达到稳定。 **(a)** Webber, Cats, Memory. **(b)** Vivaldi, The Four Seasons, Spring. **(c)** Shubert, The Linden Tree. **(d)** Mendelssohn, Wedding March. **(e)** Beethoven, Fate Symphony. **(f)** Mozart, 12 Variations on "Ah, vous dirai-je, Maman"。

特征二：旋律曲线的光滑性

Characteristic II: Smoothness of melody curves

旋律波动具有明确且相似的轮廓线，旋律曲线光滑性趋于较小的常数：“旋律光滑吸引子”

$$\boldsymbol{S} = \sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{i})\log \boldsymbol{i} = \boldsymbol{E}(\log \boldsymbol{i}) \rightarrow \boldsymbol{m}$$



旋律曲线光滑性*S*随音乐发展的变化。 **(a)** Mozart, 12 Variations on "Ah, vous dirai-je, Maman", K.265. **(b)** Beethoven, Fate Symphony. **(c)** Shubert, The Linden Tree. **(d)** Mendelssohn, Wedding March. **(e)** Sibelius, Finlandia. **(f)** Bach, Concerto Violin and Oboe in C Minor, BWV 1060, II.

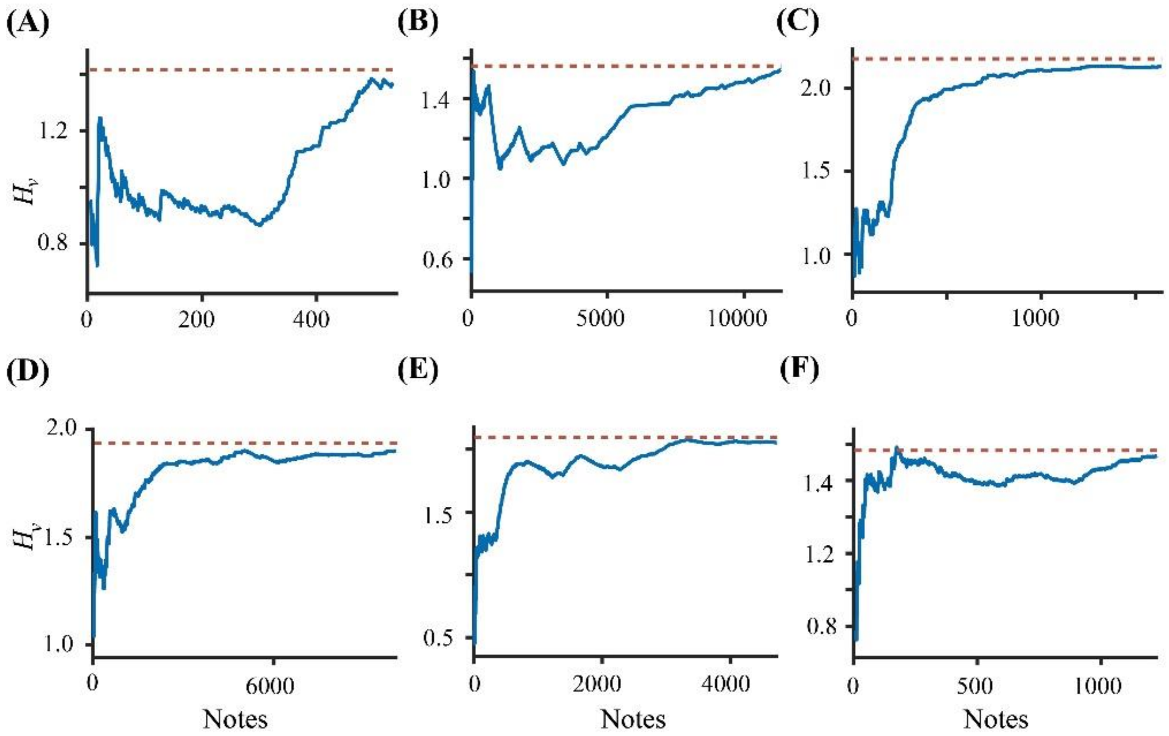
特 征 三： 旋 律 变 化 的 熵 最 大

Characteristic III: Entropy maximization of melody variations

各种音程的特性各异，我们定义音程熵来度量音程的混乱程度，即音程的多样性：

$$H_v = -\sum_i p(i)\log p(i)$$

其中$p(i)$为音程i 出现的频率，这里为旋律音程。随着音乐的进行，旋律需要得到足够充分的发展，这使得旋律音程更加多样化，“音程熵”达到最大，即最大熵原理。

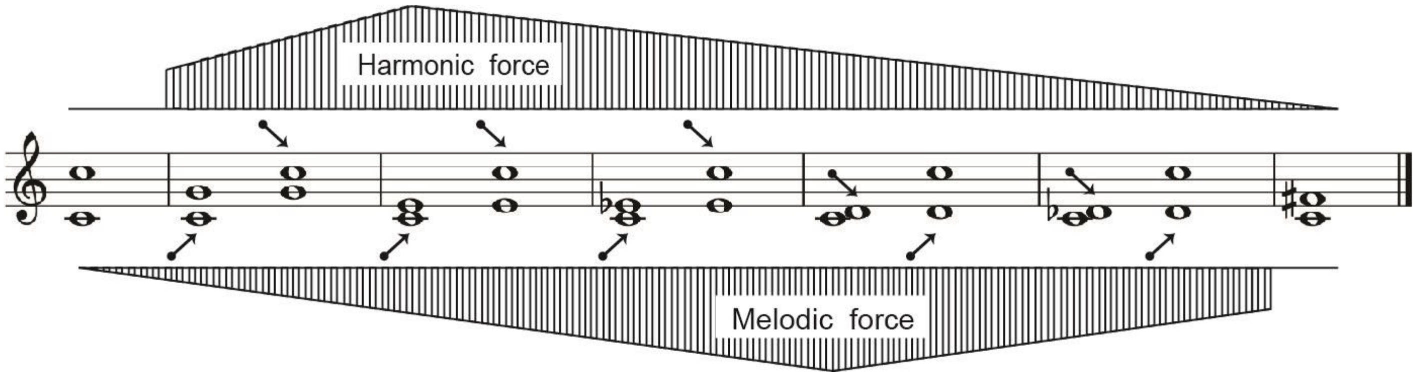


随着乐曲的发展，音程熵H_v的达到最大。 **(a)** Vivaldi, The Four Seasons, Spring. **(b)** Mendelssohn, Wedding March.**(c)** Shubert, The Linden Tree.**(d)** Beethoven, Fate Symphony. **(e)** Mozart, 12 Variations on "Ah, vous dirai-je, Maman", K.265. **(f)** Bach, Concerto Violin and Oboe in C Minor, BWV 1060, II.

音程熵

Interval Entropy

➢ 音程是音乐的构成材料。欣德米特认为，任何音的运动都因和声力和旋律力的结合作用而产生（先不考虑节奏成分），不同音程的旋律力与和声力不同。以下音程次序清楚地表示出了各种音程和声力及旋律力这两种特性的区别。



➢ 调性音乐可以称之为“发展的变奏”风格。乐曲的“胚芽”是基本动机，基本动机是通过精确的、变化的和发展的重复来运用的。有变化的重复通过变奏而产生。在旋律变奏中，主要对线条加以回绕、填充、变形、加花、扩张、紧缩、倒转、逆行和摄取等手法，从而形成新的素材。随着旋律的发展，更多的对比和冲突得以体现，音乐作品在对比和冲突中呈现出更立体的形象和更丰富的含义。

随着音乐的发展，旋律音程更加多样，所以，音程熵必须达到最大。

基于旋律三个数学特征的数学模型，可以将此问题构造为有约束的泛函熵最大问题：

$$\max H_v = -\sum_i p(i)\ln p(i)$$

最大音程熵

s. t.

$$\begin{cases} \sum_i p(i) = 1 \\ \sum_i p(i)\ln i = m \end{cases}$$

旋律光滑吸引子m is 一个小常数

应用变分法求解欧拉方程，可得到幂律

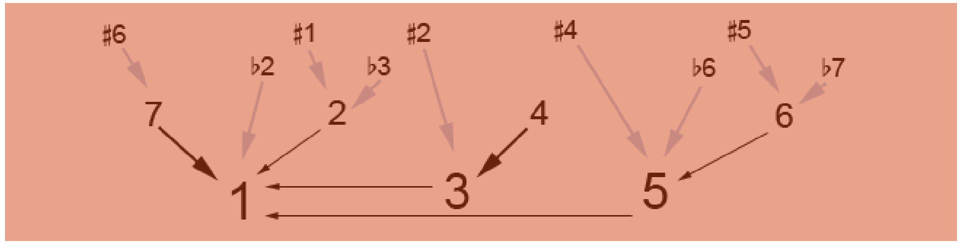
$$T(i) = P(I \geq i) = 1 - F(i) = ci^{-D}$$

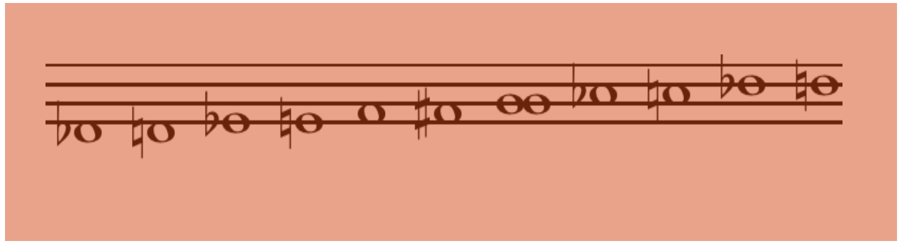
其中 $c > 0, D > 0.$

调性音乐旋律的幂律是三百多年来音乐学院讲授的作曲理论的结果。

调性音乐与无调性音乐

Tonal Music and Atonal Music





调性音乐

旋律变化服从幂律

有约束的熵最大问题

无调性音乐呢?

现代主义音乐主要代表勋伯格提出的十二音体系无调性音乐旋律变化，不符合幂律

无约束的熵最大?

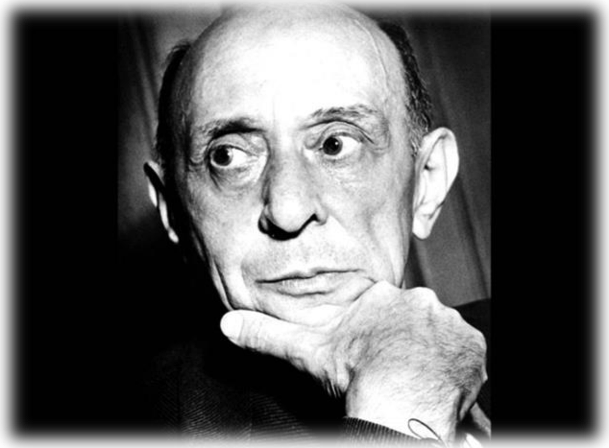
勋伯格：十二音体系

Schoenberg: Twelve-tone System

奥地利作曲家、音乐理论家勋伯格(A. Schoenberg）于1920年左右提出十二音作曲体系。

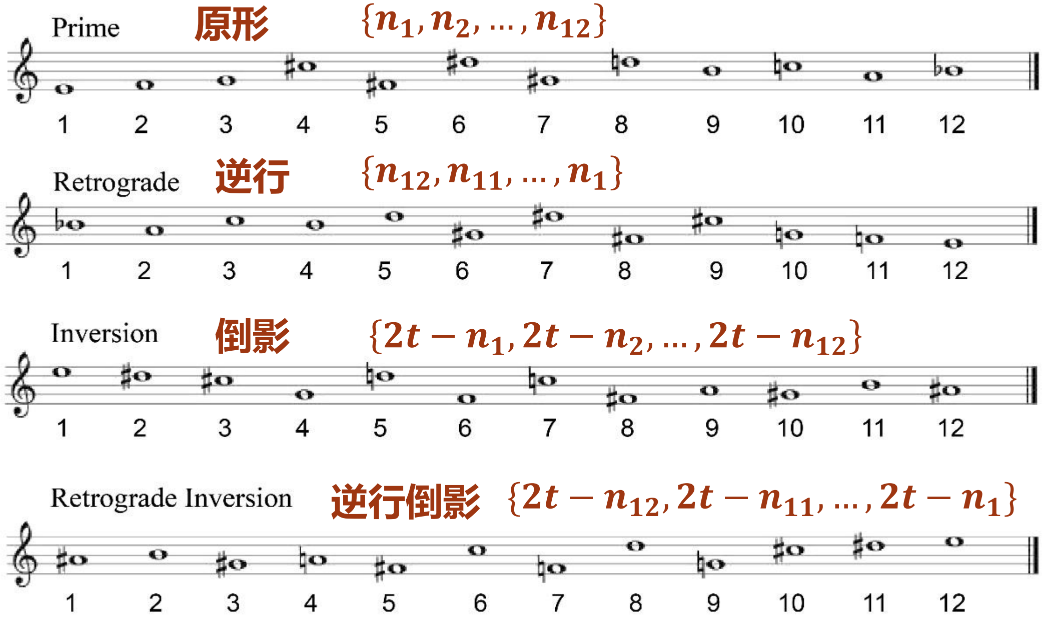
经典十二音体系的核心：音列（tone row)

一种12个音级的有序排列，其中每个音只能出现一次。



勋伯格

4种基本形式的每一种都有12种移位，共48个变体。



序列的4种基本样式

勋伯格的第一个序列作品（Op. 25, 1923）

勋伯格：十二音体系

Schoenberg: Twelve-tone System

十二音体系中旋律音程的数学模型

根据十二音体系，其音高序列是一个均匀随机分布。我们假设随机变量A和B是独立且相同的从a_0到b_0的均匀随机分布，其中$b_0 > a_0 \geq 0$，那么旋律音程就是两个相邻音高之差的绝对数值$W = |A - B|$。我们很容易得到，随机变量W的概率密度函数是

$$f_W(w) = \begin{cases} \dfrac{2(-w + b_0 - a_0)}{(b_0 - a_0)^2}, & 0 \leq w \leq b_0 - a_0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

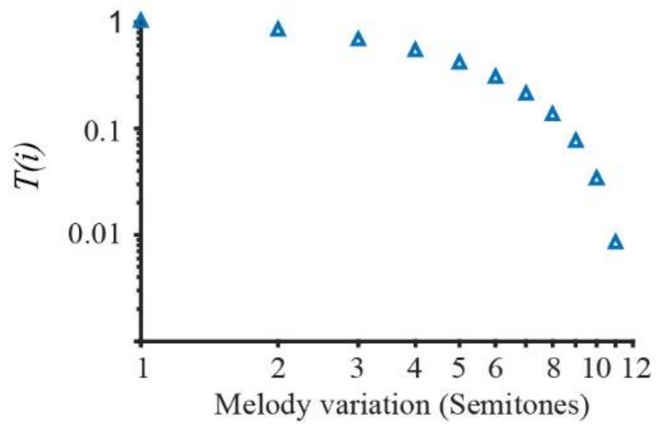
则随机变量W的逆累积分布为

$$T(i) = P(W \geq i) = \left(1 - \frac{i}{b_0 - a_0}\right)^2$$

其中 i 是以半音为单位的旋律音程。

此分布不是幂律。

各音级等概率使用，无约束条件的熵最大。



根据勋伯格十二音体系仿真得到的结果

THANKS FOR YOU

谢 谢 大 家 ！